6/12/2018

Διαφορική Γεωμετρία

1. • p καλείται <u>ελλειπτικό</u> $\Leftrightarrow \mathrm{II}_p$ θετικώς ή αρνητικώς <u>ορισμένη</u> $\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow K(p) > 0$

• p καλείται <u>υπερβολικό</u> $\Leftrightarrow \mathrm{II}_p$ είναι <u>αόριστη</u> $\Leftrightarrow K(p) < 0$

• p καλείται <u>παραβολικό</u> $\Leftrightarrow \mathrm{II}_p$ θετικώς ή αρνητικώς <u>ημιορισμένη</u>
$\Leftrightarrow K(p) = 0 \neq H(p)$

• p καλείται <u>επίπεδο</u> $\Leftrightarrow \mathrm{II}_p = 0 \Leftrightarrow L_p = 0 \Leftrightarrow k_1 = k_2 = 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow H^2(p) = K(p) = 0 \Leftrightarrow e = f = g = 0$

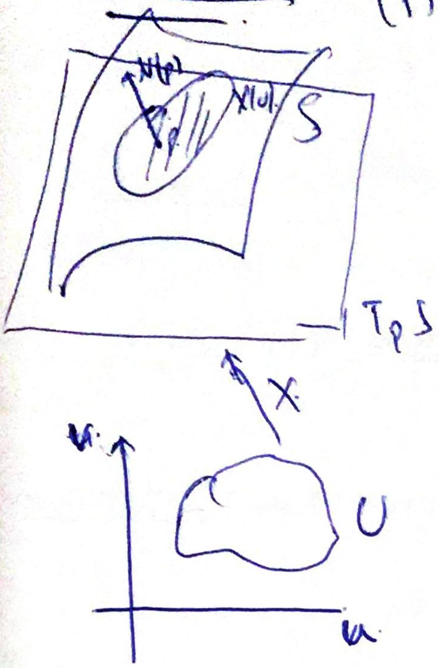
• p καλείται <u>ομφαλικό</u> $\Leftrightarrow k_1(p) = k_2(p) \neq 0 \Leftrightarrow L_p = \lambda I, \ \lambda \neq 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow H(p) = K(p) > 0 \Leftrightarrow \mathrm{II}_p = \lambda \mathrm{I}_p, \ \lambda \neq 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} e = \lambda E \\ f = \lambda F \\ g = \lambda G. \end{matrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\frac{e}{E} + \frac{f}{F} + \frac{g}{G} = \lambda \neq 0}$$

<u>Πρόταση</u>: Έστω p σημείο κανονικής επιφάνειας S.
(i) Αν το p είναι <u>ελλειπτικό</u> τότε υπάρχει περιοχή του V στην S ώστε V να περιέχεται στον ένα από τους ημιχώρους με αρχή το T_pS και $V \cap T_pS = \{p\}$
(ii) Αν το p είναι <u>υπερβολικό</u> τότε κάθε περιοχή του σημείου p περιέχει σημεία σε αμφότερα τους ημιχώρους

Απόδειξη.



(i) Θεωρώ ~~[illegible]~~ σύστημα συντ/ων $X: U \subset \mathbb{R}^2 \to S$ με παραμέτρους (u,v) και $P = X(u_0,v_0)$.
Θεωρώ την λεία συνάρτηση

$$h: U \to \mathbb{R}$$

$$h(u,v) = \langle X(u,v) - X(u_0,v_0),\ N(p) \rangle$$

$$h_u(u,v) = \langle X_u(u,v),\ N(p) \rangle$$

$$h_v(u,v) = \langle X_v(u,v),\ N(p) \rangle$$

$h_u(u_0,v_0) = 0 = h_v(u_0,v_0)$ δηλαδή το $(u_0,v_0) \in U$ είναι κρίσιμο σημείο της h.

$$h_{uu}(u,v) = \langle X_{uu}(u,v),\ N(p) \rangle$$

$$h_{uv}(u,v) = \langle X_{uv}(u,v),\ N(p) \rangle$$

$$h_{vv}(u,v) = \langle X_{vv}(u,v),\ N(p) \rangle$$

Ο Εσσιανός πίνακας της h στο (u_0,v_0) είναι:

$$\begin{pmatrix} h_{uu}(u_0,v_0) & h_{uv}(u_0,v_0) \\ h_{uv}(u_0,v_0) & h_{vv}(u_0,v_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e(u_0,v_0) & f(u_0,v_0) \\ f(u_0,v_0) & g(u_0,v_0) \end{pmatrix}$$

(i) Αν $K(p) > 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} h_{uu}(u_0,v_0) & h_{uv}(u_0,v_0) \\ h_{uv}(u_0,v_0) & h_{vv}(u_0,v_0) \end{vmatrix} = (eg - f^2)(u_0,v_0)$

$K(p) = \dfrac{eg - f^2}{EG - F^2}(u_0,v_0) > 0$ Άρα η h παρουσιάζει στο (u_0,v_0) τοπικό ακρότατο $h(u_0,v_0) = 0$

Θεώρημα: Έστω S συνεκτική προσανατολίσιμη (2)
Επιφάνεια. Αν ισχύει $k_1 = k_2$ παντού (ή ισοδύναμα
ισχύει $H^2 = K$ παντού) τότε η S είναι ανοιχτό υποσύνολο
επιπέδου ή σφαίρας.

Απόδειξη: Γνωρίζω ότι $\underbrace{k_1(p) = k_2(p)}_{= k(p)}$ $\forall p \in S$

$$L_p = \begin{pmatrix} k(p) & 0 \\ 0 & k(p) \end{pmatrix} = k(p) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \boxed{L_p = k(p) \, Id_p. \ \forall p \in S}$$

Γνωρίζουμε ότι $k_{1,2} = H \pm \sqrt{\cancel{H^2 - K}}$

Άρα $k = H$ Άρα $\underline{k \text{ λείο}}$.

Θεωρώ σύστημα συντεταγμένων $X : U \subset \mathbb{R}^2 \to S$ με
παραμέτρους (u, v)

$$\left.\begin{aligned} LX_u &= kX_u \\ LX_v &= kX_v \end{aligned}\right| \Leftrightarrow \left.\begin{aligned} -N_u &= kX_u \Leftrightarrow -N_{uv} = (k \circ X)_v X_u + k \circ X X_{uv} \\ -N_v &= kX_v \Leftrightarrow -N_{vu} = (k \circ X)_u X_v + k \circ X X_{vu} \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\boxed{\begin{aligned} LX_u &= -(N \circ X)_u = -N_u \\ LX_v &= -(N \circ X)_v = -N_v \end{aligned}} \quad \begin{aligned} &\Rightarrow (k \circ X)_v X_u - (k \circ X)_u X_v = 0 \xRightarrow{\{X_u, X_v\} \text{ βάση}} \\ &\Rightarrow (k \circ X)_u = 0 = (k \circ X)_v \Leftrightarrow dk(X_u) = 0 = dk(X_v) \end{aligned}$$

$\Rightarrow dk_p = 0 \quad \forall p \in X(U)$

Άρα έδειξα ότι $dk_p = 0 \quad \forall p \in S$.

$\Rightarrow k = \text{σταθερά} = \lambda$.

1η περίπτωση: $\lambda = 0 \Rightarrow L_p = 0 \quad \forall p \in S$

$\Rightarrow dN_p = 0 \quad \forall p \in S \Rightarrow N = \text{σταθερό διάνυσμα} = (A, B, \Gamma)$

Ορίζω την $2^{\eta\alpha}$ συνάρτηση $h : S \to \mathbb{R}$

$h(p) = h(x, y, z) = Ax + By + \Gamma z = \langle P, N \rangle$

$dh_p(\omega) = \langle \omega, N \rangle \quad \omega \in T_pS$

$= 0 \Rightarrow h = \sigma\tau\alpha\theta\varepsilon\rho\acute{\eta} \Rightarrow$ Είναι τμήμα επιπέδου

<u>2η περίπτωση</u> $\lambda \neq 0$: $L_p = \lambda Id_p \quad \forall p \in S$

$\Leftrightarrow dN_p + \lambda Id_p = 0 \quad \forall p \in S$

Ορίζω την απεικόνιση $\phi : S \to \mathbb{R}^3 \quad \phi(p) = N(p) + \lambda p$

$\phi = N + \lambda Id|_S$ είναι λεία με $d\phi_p = dN_p + \lambda Id_p = 0$

$\Rightarrow \phi = \sigma\tau\alpha\theta\varepsilon\rho\acute{\alpha} = P_0$ Άρα έχω δείξει ότι

~~[illegible]~~ $N(p) + \lambda p = P_0 \quad \forall p \in S$

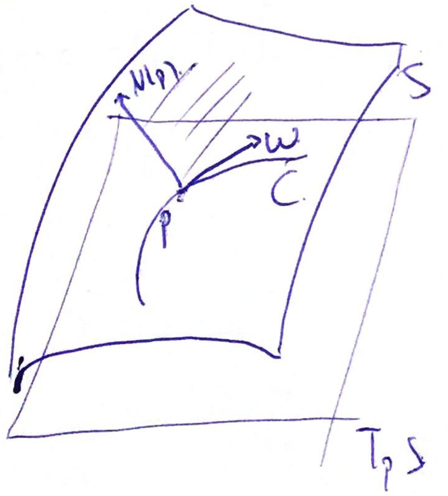
$\frac{1}{\lambda} N(p) + p = \frac{1}{\lambda} P_0 \Rightarrow p - \frac{1}{\lambda} P_0 = -\frac{1}{\lambda} N(p) \Leftrightarrow$

$\|p - \frac{1}{\lambda} P_0\| = \frac{1}{|\lambda|}$ Άρα $\boxed{d(p, \frac{1}{\lambda} P_0) = \frac{1}{|\lambda|}}$.

Οπότε είναι σφαίρα.

ΔΕΝ ΥΠΑΡΧΟΥΝ ΣΥΜΠΑΓΕΙΣ ΕΠΙΦΑΝΕΙΕΣ
ΜΕ ΙΣΟΠΕΔΑ ΣΗΜΕΙΑ

<u>Κάθετη Καμπυλότητα.</u>



$\omega \in T_pS \setminus \{0\} \quad K_n(\omega) = \frac{II_p(\omega)}{I_p(\omega)}$

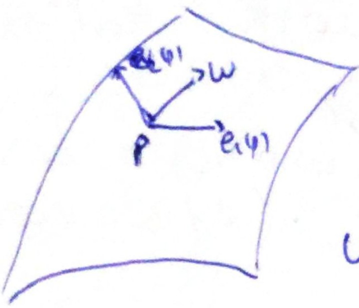
$K_n(\omega) = K_C(p)$

Ασυμπτωτικές Διευθύνσεις - Ασυμπτωτικές Καμπύλες

<u>Ορισμός</u>: Έστω $p \in S$. Το $w \in T_pS \setminus \{0\}$ καλείται <u>ασυμπτωτική διεύθυνση</u> στο σημείο p αν-ν ισχύει

$k_n(w) = 0 \ (\Leftrightarrow \mathrm{II}_p(w)) = 0$

<u>Ορισμός</u>: Μια <u>κανονική</u> καμπύλη $c: I \subset \mathbb{R} \to S$ καλείται <u>ασυμπτωτική καμπύλη</u> της S αν-ν $c'(t)$ είναι ασυμπτωτική διεύθυνση $\forall t \in I$.



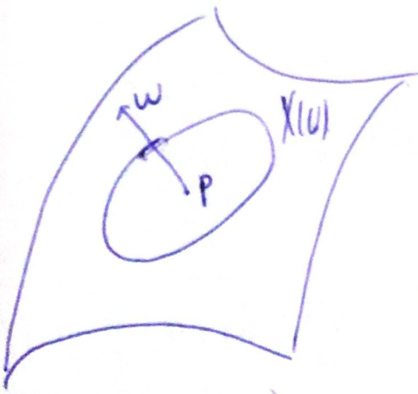
$w = x e_1(p) + y e_2(p)$

$\mathrm{II}_p(w) = k_1(p) x^2 + k_2(p) y^2$

w ασυμπ. διευθ $\Leftrightarrow k_1(p) x^2 + k_2(p) y^2 = 0$

$D_p = \{ w \mid \mathrm{II}_p(w) = \pm 1 \}$

$= \{ w = x e_1(p) + y e_2(p) \mid k_1(p) x^2 + k_2(p) y^2 = \pm 1 \}$

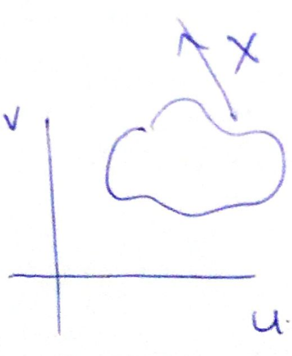


$w = a X_u + b X_v$

w είναι ασυμπ διευθ $\Leftrightarrow \mathrm{II}_p(w) = 0$

$\Leftrightarrow \boxed{e a^2 + 2abf + g b^2 = 0}$ όπου τα

e, f, g υπολογίζονται στο $X^{-1}(p)$



$$w \Leftrightarrow \begin{cases} e\left(\frac{a}{b}\right)^2 + 2f\frac{a}{b} + g = 0 \\ e + 2f\frac{b}{a} + g\left(\frac{b}{a}\right)^2 = 0 \end{cases}$$

Συμπέρασμα:

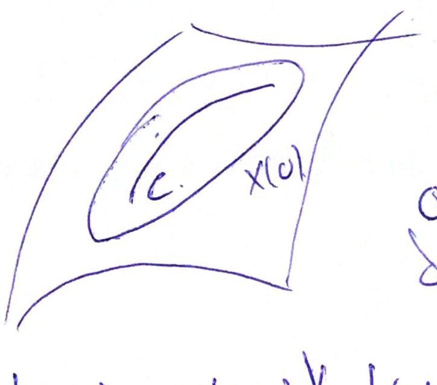
- P επίπεδο : Κάθε εφαπτόμενη διεύθυνση είναι ασυμπτωτική. [Εδώ έχω άπειρες λύσεις]

- Αν $(e,g) \neq (0,0)$: Τότε η διακρίνουσα είναι

$$(2f)^2 - 4eg = -4(eg - f^2) \qquad K \circ X = \frac{eg - f^2}{EG - F^2}$$

Έχω τις εξής περιπτώσεις:

- P ελλειπτικό : Δεν υπάρχουν ασυμπτωτικές διευθύνσεις.
- P υπερβολικό : Υπάρχουν δύο ακριβώς ασυμ. διευθύνσεις
- P παραβολικό : Υπάρχει μια (διπλή) ασυμπτωτική διεύθυνση.



$c(t) = X(u(t), v(t))$

Η κανονική καμπύλη c είναι ασυμπτωτική $\Leftrightarrow$ $c'(t)$ είναι ασυμπτωτική διεύθυνση $\forall t \in I$.

$$c'(t) = u'(t) X_u(u(t), v(t)) + v'(t) X_v(u(t), v(t))$$

Η c είναι ασυμπτωτική καμπύλη $\Leftrightarrow$

$$\boxed{e(u(t),v(t))(u'(t))^2 + 2f(u(t),v(t))u'(t)v'(t) + g(u(t),v(t))(v'(t))^2 = 0}$$

Πρόταση: Έστω $X: U \to S$ σύστημα συντ/ων (4)
Τα σημεία της αντίστοιχης περιοχής συντ/ων είναι όλα υπερβολικά.

Αν ισχύει $e = 0 = g$. Τότε οι παραμετρικές καμπύλες του X είναι ασυμπτωτικές καμπύλες και αντίστροφα. ΔΙΚΤΥΟ ΑΣΥΜΠΤΩΤΙΚΩΝ ΚΑΜΠΥΛΩΝ

Απόδειξη: Έστω $e = g = 0$. Τότε η κανονική καμπύλη $c(t) = X(u(t), v(t))$ είναι ασυμπτωτική $\Leftrightarrow$

$$\left.\begin{array}{l} \Leftrightarrow 2f(u(t),v(t))\,u'(t)\,v'(t) = 0 \\ K<0 \Leftrightarrow eg - f^2 < 0 \Rightarrow f \neq 0 \text{ παντού} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow u'(t) = 0$ ή $v'(t) = 0 \Rightarrow u(t) = \text{σταθ}$ ή $v(t) = \text{σταθ}$.

Αντίστροφα: Έστω ότι οι παραμετρικές καμπύλες είναι ασυμπτωτικές καμπύλες $\Rightarrow (u(t), v(t)) = (t, \text{σταθ})$ ή $(\text{σταθ}, t)$

Έστω S της οποίας όλα τα σημεία είναι υπερβολικά

Θεώρημα: Έστω S επιφάνεια της οποίας όλα τα σημεία είναι υπερβολικά. Τότε για κάθε σημείο $p \in S$ υπάρχει δίκτυο ασυμπτωτικών καμπυλών $X: U \to S$ με $p \in X(U)$.

Παράδειγμα: Θεωρώ την επιφάνεια γράφημα S με εξίσωση $z=x^2-y^2$. Είναι επιφάνεια γράφημα Γ_h της $h:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ $h(x,y)=x^2-y^2$. (5)
Να βρεθούν αν υπάρχουν ασυμπτωτικές διευθύνσεις.

Λύση. Υπολογίζω τα e, f, g ως προς το σύστημα συντεταγμένων $X:\mathbb{R}^2\to S$

$$X(u,v)=(u,v,h(u,v))=(u,v,u^2-v^2)$$

$$e(u,v)=\frac{h_{uu}(u,v)}{\sqrt{h_u^2+h_v^2+1}} \qquad f(u,v)=\frac{h_{uv}(u,v)}{\sqrt{h_u^2+h_v^2+1}}$$

$$g(u,v)=\frac{h_{vv}(u,v)}{\sqrt{h_u^2+h_v^2+1}}$$

$$h_u=2u \qquad h_v=-2v \qquad h_{uu}=2 \qquad h_{vv}=-2$$

$$e(u,v)=\frac{2}{\sqrt{}} \qquad f(u,v)=0, \quad g(u,v)=-\frac{2}{\sqrt{}}$$

Παρατηρώ ότι $eg-f^2=-\frac{4}{4u^2+4v^2+1}<0$

Δηλαδή όλα τα σημεία είναι υπερβολικά. Συνεπώς από κάθε σημείο διέρχονται δύο ακριβώς ασυμπτωτικές διευθύνσεις

<u>Συνέχεια Λύσης</u>: Η καμπύλη $c(t) = X(u(t), v(t))$ είναι ασυμπτωτική καμπύλη αν-ν

$$e(u(t),v(t))(u'(t))^2 - 2f(u(t),v(t))v'(t)u'(t) + g(u(t),v(t))(v'(t))^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{\sqrt{}}(u'(t))^2 - \frac{2}{\sqrt{}}(v'(t))^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (u'(t))^2 - (v'(t))^2 \Leftrightarrow (u'(t) - v'(t))(u'(t) + v'(t)) = 0$$

$\Leftrightarrow u(t) - v(t) = \sigma\tau\alpha\theta$ ή $u(t) + v(t) = \sigma\tau\alpha\theta.$

$\Leftrightarrow u(t) - v(t) = a_1$ ή $u(t) + v(t) = a_2.$

Έχω δυο οικογένειες ασυμπτωτικών καμπυλών

<u>1η οικ.</u>: $v(t) = t$, οπότε $u(t) = a_1 + t.$

$$c(t) = X(a_1 + t, t) = (a_1 + t, t, (a_1 + t)^2 - t^2)$$
$$= (a_1 + t, t, a_1^2 + 2ta_1) = (a_1, 0, a_1^2) + t(1, 1, 2a_1)$$

$\Rightarrow$ <u>Ευθείες</u>

<u>2η οικ.</u>: Επιλέγω $v(t) = t$ οπότε $u(t) = a_2 - t.$

$$c(t) = X(a_2 - t, t) = (a_2 - t, t, (a_2 - t)^2 - t^2)$$
$$= (a_2 - t, t, a_2^2 - 2a_2t) \Rightarrow \text{Ευθείες}$$

<u>Εύρεση διαγωνίων ασυμπτωτικών καμπυλών</u>

Σίγουρα υπάρχει διότι όλα τα σημεία είναι υπερβολικά.

Ορίζω παραμέτρους $(\tilde{u},\tilde{v})$ ως εξής:

$\tilde{u} = u - v$, $\tilde{v} = u + v$ ⇔

$$\Rightarrow \begin{cases} u = \frac{1}{2}(\tilde{u}+\tilde{v}) \\ v = \frac{1}{2}(\tilde{v}-\tilde{u}) \end{cases}$$

$$X(u,v) = X\left(\frac{1}{2}(\tilde{u}+\tilde{v}), \frac{1}{2}(\tilde{v}-\tilde{u})\right) = \tilde{X}(\tilde{u},\tilde{v})$$

$$\tilde{X}(\tilde{u},\tilde{v}) = X\circ\phi(\tilde{u},\tilde{v})$$

όπου $\phi: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ $\phi(\tilde{u},\tilde{v}) = (u,v) = \left(\frac{1}{2}(\tilde{u}+\tilde{v}), \frac{1}{2}(\tilde{v}-\tilde{u})\right)$

Το $\tilde{X}$ είναι σύστημα αντιλων ⇔ ϕ είναι διαφορος

Κύριες Διευθύνσεις:

$L_p e_1(p) = k_1(p) e_1(p)$

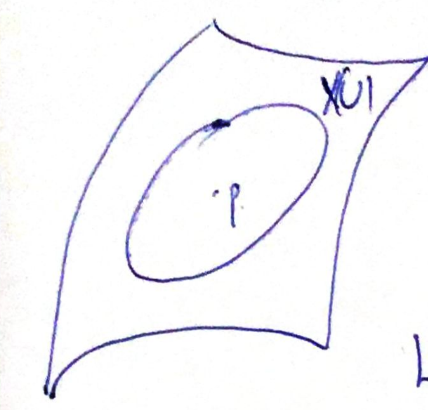
$L_p e_2(p) = k_2(p) e_2(p)$

Ορισμός: Έστω $p \in S$. Το διάνυσμα $w \in T_pS \setminus \{0\}$ καλείται κύρια διεύθυνση στο p αν-ν είναι ιδιοδιάνυσμα της ~~απεικόνισης~~ απεικόνισης Weingarten $L_p: T_pS \to T_pS$

Ορισμός: Μια κανονική καμπύλη $c: I \subset \mathbb{R} \to S$ καλείται καμπύλη καμπυλότητας ⇔ $c'(t)$ είναι κύρια διεύθυνση $\forall t \in I$.

~~[illegible]~~

Εύρεση κυρίων διευθύνσεων.



Θεωρώ σύστημα συντεταγμένων $X: U \subset \mathbb{R}^2 \to S$ με $p \in X(U)$

Το $w = aX_u + bX_v \in T_pS - \{0\}$ είναι κύρια διεύθυνση $\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}$ ώστε

$L_p w = \lambda w \Leftrightarrow L_p(aX_u + bX_v) = \lambda(aX_u + bX_v) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow aLX_u + bLX_v = \lambda a X_u + \lambda b X_v.$

$$\begin{aligned} LX_u &= a_{11}X_u + a_{21}X_v \\ LX_v &= a_{12}X_u + a_{22}X_v \end{aligned} \quad \Bigg| \quad (a_{ij}) = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow a(a_{11}X_u + a_{21}X_v) + b(a_{12}X_u + a_{22}X_v) = \lambda a X_u + \lambda b X_v \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (a a_{11} + b a_{12})X_u + (a a_{21} + b a_{22})X_v = \lambda a X_u + \lambda b X_v \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a a_{11} + b a_{12} = \lambda a \\ a a_{21} + b a_{22} = \lambda b \end{cases} \Longrightarrow \begin{aligned} & ab a_{11} + b^2 a_{12} = a^2 a_{21} + ab a_{22} \\ & \Leftrightarrow a_{21} a^2 + (a_{22} - a_{11})ab - a_{12} b^2 = 0 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow \begin{vmatrix} b^2 & -ab & a^2 \\ E & F & G \\ e & f & G \end{vmatrix} = 0$$

όπου τα E, F, G, e, f, g υπολογίζονται στο $X^{-1}(p)$

$c(t) = X(u(t), v(t))$

Η c είναι καμπύλη καμπυλότητας $\Leftrightarrow$

$c'(t) = u'(t) X_u(u(t), v(t)) + v'(t) X_v(u(t), v(t))$

Είναι κύρια διεύθυνση ευ.

$$\begin{vmatrix} (u'(t))^2 & -u'(t)v'(t) & (v'(t))^2 \\ E & F & G \\ e & f & g \end{vmatrix} = 0$$

Παρατήρηση(!!!!)

- Αν στο σημείο p ισχύει $k_1(p) = k_2(p) = \lambda$ τότε έχω ότι η απεικόνιση Weingarten είναι $L_p = \lambda I d_p$.
Άρα κάθε διάνυσμα είναι κύρια διεύθυνση.

- Αν στο p ισχύει $k_1(p) > k_2(p)$ τότε υπάρχουν δύο ακριβώς κύριες διευθύνσεις.

. Έστω $z = x^2 + y^2$.

Έχω άπειρες καμπύλες καμπυλότητας